Métodos topológicos en el análisis no lineal
Clase 22, 25/11 - Versión preliminar

¡Caramba, qué coincidencia!

La referencia del título no es tanguera pero sí vernácula y remite a aquel rey enamorado que se hacía acompañar de su juglar para cantar odas a su amada. Lo que motiva el recuerdo de esta fuente de dulzura es el teorema de continuación que la clase pasada enunciamos, con cierta visión de futuro, de manera abstracta. El resultado general se plantea para $L : D \to Y$ lineal, donde X, Y son espacios normados y $D \subset X$ es un subespacio. Se dice que L es un operador de Fredholm de índice 0 sii $\mathrm{Im}(L)$ es cerrado y

$$\dim(\ker(L)) = \mathrm{codim}(\mathrm{Im}(L)) < \infty.$$

En tal caso, el teorema de Hahn-Banach garantiza que existen proyectores $P : X \to X$ y $Q : Y \to Y$ tales que $\mathrm{Im}(P) = \ker(L)$ y $\ker(Q) = \mathrm{Im}(L)$. Como ya sabemos, $X = \ker(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$, de modo que $L|_{D\cap\ker(P)} : D \cap \ker(P) \to \mathrm{Im}(L)$ es biyectiva y tiene en consecuencia una inversa algebraica que (¡adivinen!) llamaremos K. Además, $Y = \ker(Q) \oplus \mathrm{Im}(Q)$ y, por esas cosas de la dimensión, existe un isomorfismo $J : \mathrm{Im}(Q) \to \ker(L)$. Para el que a esta altura esté desorientao y no sepa qué trole hay que tomar, se recomienda fuertemente recordar quiénes eran todos estos sujetos (X, Y, D, L, P, Q, K, J) en el caso del problema periódico; ahora nos toca seguir un poco más y considerar un operador continuo $N : \overline{\Omega} \to Y$ donde $\Omega \subset X$ es un abierto acotado. Y de N no se dice que es chueco o camina a lo malevo, pero sí que es L-compacto cuando el conjunto $QN(\overline{\Omega})$ es acotado y además el operador $K(I - Q)N$ es compacto. Esto último puede llamar la atención, ya que en todos los ejemplos que vimos directamente K es compacto; sin embargo, en algunas aplicaciones no lo es.[1] En resumen, se trata de pedir lo mínimo indispensable para que la descomposición de Lyapunov-Schmidt que vimos en la clase previa funcione bien en el marco del grado de Leray-Schauder. La L-compacidad garantiza que el grado del operador

$$\mathcal{F}_\lambda(u) = u - [Pu + JQN(u) + \lambda K(N(u) - QN(u)))]$$

[1]Para el problema $u''(t) = f(t, u(t), u'(t))$, esto ocurre cuando f no es continua sino lo que se llama una *función L^1-Carathéodory. En tal caso, para $v \in C^1_T$ la función $\varphi(t) =$* $f(t, v(t), v'(t))$ pertenece al espacio $L^1(0, T)$ y entonces Kv es de clase C^1 pero K no es compacto. El que conozca los espacios de Sobolev recordará las razones de esto: la inmersión $W^{2,p}(0, T) \hookrightarrow C[0, T]$ es compacta únicamente para $p > 1$.

está bien definido y es constante, siempre que encontremos un abierto acotado Ω tal que $\mathcal{F}_\lambda$ no se anule en el borde. Luego, el grado de $\mathcal{F}_1$ es igual al de $\mathcal{F}_0$ que, a su vez, se reduce a dimensión finita: es lo que antes llamamos ϕ, que no es otra cosa que JQN y, tomando alguna base de $\ker(L)$, se puede identificar directamente con una función en $\mathbb{R}^n$. El teorema es el mismo de la clase pasada; lo que cambia es que la “situación anterior” ahora es mucho más general:

Teorema 0.1 *En la situación anterior, supongamos que existe un abierto acotado $\Omega \subset X$ tal que*

1. $Lu \neq \lambda N(u)$ *para* $u \in \partial\Omega$ *y* $\lambda \in (0,1)$*.*
2. $JQN(u) \neq 0$ *para* $u \in \partial\Omega \cap \ker(L)$*.*
3. $\deg_B(JQN, \Omega \cap \ker(L), 0) \neq 0$*.*

Entonces el problema $Lu = N(u)$ tiene al menos una solución $u \in \overline{\Omega} \cap D$.

Este resultado más general fue obtenido por Mawhin [1]; el grado así obtenido se llama *grado de coincidencia* entre los operadores L y N y se lo suele escribir en la forma $d[(L,N),\Omega]$. La idea es clara: lo que antes llamamos informalmente un ‘conteo algebraico’ de los ceros de cierta F, ahora se transforma en un conteo de los puntos en los que L y N coinciden. Esto no es una gran novedad cuando el problema es no resonante y podemos emplear $F = I - L^{-1}N$; sin embargo, la construcción permite tratar de un solo saque problemas mucho más generales.

Se puede probar que el grado así definido no depende de los proyectores P, Q elegidos salvo eventualmente en el signo: esto último se debe al hecho de que J se elige libremente, pues no hay un criterio razonable para hacerlo (concretamente: no hay nada que se parezca a una ‘orientación natural’ para los espacios involucrados).

Volvamos ahora a Landesman-Lazer para el problema de Dirichlet

$$u''(t) + n^2u(t) + g(u(t)) = p(t), \qquad u(0) = u(\pi) = 0$$

donde, como dijimos, $\ker(L)$ está generado por $\operatorname{sen}(nt)$. Como hicimos en la clase previa, es más cómodo usar la versión normalizada $\psi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen}(nt)$ y los operadores son exactamente los mismos que vimos para el caso $n = 1$ y la función ϕ, una vez identificado $\operatorname{gen}\{\psi_n\}$ con $\mathbb{R}$, es simplemente la función dada por

$$\phi(s) = \int_0^\pi p(t)\psi_n(t)\,dt - \int_0^\pi g(s\psi_n(t))\psi_n(t)\,dt.$$

La diferencia con el caso $n = 1$ es que ahora hay que tener cuidado al tomar los límites $s \to \pm\infty$, ya que ψ_n cambia de signo. Pero la solución es muy simple: alcanza con diferenciar los conjuntos donde ψ_n es positiva o negativa:

$$A_n^+ := \{t \in (0,\pi) : \psi_n(t) > 0\}, \qquad A_n^+ := \{t \in (0,\pi) : \psi_n(t) < 0\}$$

y

$$A_n^+ := \{t \in (0,\pi) : \psi_n(t) > 0\}, \qquad A_n^- := \{t \in (0,\pi) : \psi_n(t) < 0\}$$

de esta forma

$$\lim_{s\to\pm\infty} \phi(s) = \int_0^\pi p(t)\psi_n(t)\,dt - g(\pm\infty)\int_{A_n^+} \psi_n(t)\,dt - g(\mp\infty)\int_{A_n^-} \psi_n(t)\,dt.$$

Por eso, las condiciones de Landesman-Lazer suelen expresarse como

$$g(+\infty)\int_{A_n^+} \psi_n(t)\,dt + g(-\infty)\int_{A_n^-} \psi_n(t)\,dt > \int_0^\pi p(t)\psi_n(t)\,dt$$

$$> g(-\infty)\int_{A_n^+} \psi_n(t)\,dt + g(+\infty)\int_{A_n^-} \psi_n(t)\,dt$$

o viceversa. Claro que en este caso concreto las integrales se pueden calcular, teniendo en cuenta que

$$\int_{A_n^+} \mathrm{sen}(nt)\,dt = \int_{A_n^-} \mathrm{sen}(nt)\,dt = 1$$

si n es par y

$$\int_{A_n^+} \mathrm{sen}(nt)\,dt = \frac{n+1}{n}, \qquad \int_{A_n^-} \mathrm{sen}(nt)\,dt = -\frac{n-1}{n}$$

si n es impar. De esta forma, las respectivas condiciones toman la forma

$$g(+\infty) - g(-\infty) > \int_0^\pi p(t)\mathrm{sen}(nt)\,dt > g(-\infty) - g(+\infty)$$

o viceversa, para n par, o bien

$$g(+\infty)\frac{n+1}{n} - g(-\infty)\frac{n-1}{n} > \int_0^\pi p(t)\mathrm{sen}(nt)\,dt > g(-\infty)\frac{n+1}{n} - g(+\infty)\frac{n-1}{n}$$

o viceversa, cuando n es impar.

Queda como ejercicio verificar que estas condiciones también garantizan las cotas a priori. Esto es exactamente igual a lo que vimos para el caso $n = 1$: si $u'' + n^2u = \lambda(p - g(u))$ y vale la condición de Dirichlet, entonces $\|u - P(u)\|_\infty \leq \|u'' + n^2u\|_\infty \leq r$ y además $\int_0^\pi p\psi_n = \int_0^\pi g(u)\psi_n$. Escribiendo esta última igualdad como

$$\int_0^\pi p(t)\psi_n(t)\,dt = \int_0^\pi g(a\psi_n(t) + A(t))\psi_n(t)\,dt$$

con A acotada, uno llega al feliz resultado (o, mejor: uno llega, feliz, al resultado).

Observación 0.2 *Notemos que si uno suma una constante a la ecuación, siempre se puede suponer que $g(-\infty) = -g(+\infty)$; de esta forma, las condiciones anteriores se escriben de manera mucho más sencilla:*

$$\left| \int_0^\pi p(t)\mathrm{sen}(nt)\, dt \right| < |g(+\infty) - g(-\infty)| = 2|g(\pm\infty)|$$

ya sea n par o impar. En definitiva, las condiciones de Landesman-Lazer dicen que hay soluciones siempre que la proyección de p sobre el núcleo de L sea suficientemente chica.

El teorema de Lazer-Leach es similar; la ecuación es la misma de antes

$$u''(t) + n^2 u(t) + g(u(t)) = p(t),$$

aunque ahora $p \in C_{2\pi}$ y se trata de encontrar soluciones 2π-periódicas. La dificultad es que el núcleo del operador $Lu := u''$ tiene dimensión 2,

$$\ker(L) = \mathrm{gen}\{\cos(nt), \mathrm{sen}(nt)\};$$

sin, embargo, no hay diferencias a la hora de aplicar nuestro teorema de continuación multi-terreno. Parece razonable trabajar en los espacios $X = Y = C_{2\pi}$ y $D = C^2_{2\pi}$. Desde el punto de vista de L^2, sigue valiendo que $\mathrm{Im}(L) = \ker(L)^\perp$, mientras que las proyecciones P y Q en este caso son literalmente iguales:

$$P(u) = Q(u) = a(u)\cos(nt) + b(u)\,\mathrm{sen}(nt),$$

donde

$$a(u) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\cos(nt)\, dt, \qquad b(u) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\,\mathrm{sen}(nt)\, dt.$$

Como en el caso anterior, para g acotada y con límites (distintos) en $\pm\infty$, vamos a ver que si la proyección de p es chica entonces hay soluciones 2π-periódicas. Para eso, alcanza con encontrar cotas a priori para la ecuación

$$u''(t) + n^2 u(t) = \lambda[p(t) - g(u(t))] \tag{1}$$

con $\lambda \in (0,1)$ y probar que $\deg(\phi, B_R(0), 0) \neq 0$ para $R \gg 0$, donde ϕ se puede pensar directamente como una aplicación de $\mathbb{R}^2$. En efecto, notemos que también ahora se puede tomar J como la identidad, así que el operador JQN restringido al núcleo de L se puede pensar directamente como la función $(r,s) \mapsto (a,b)$, con

$$a := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [p(t) - g(u(t))]\cos(nt)\, dt, \qquad b := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [p(t) - g(u(t))]\,\mathrm{sen}(nt)\, dt,$$

donde $u(t) = r\cos(nt) + s\,\mathrm{sen}(nt)$. Pero quien dice $\mathbb{R}^2$ perfectamente puede decir $\mathbb{C}$, lo que da una versión mucho más elegante de ϕ:

$$\phi(r + si) = a(p) + ib(p) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(r\cos(nt) + s\,\mathrm{sen}(nt))e^{int}\, dt.$$

Y ya que estamos en el baile, conviene recurrir a un truco muy apreciado en las mejores milongas: la forma polar. Si escribimos $r + si = \rho e^{i\omega}$, entonces queda

$$\phi(\rho e^{i\omega}) = a(p) + ib(p) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\rho\cos(nt-\omega))e^{int}\,dt,$$

y por sustitución (y periodicidad) vale:

$$\phi(\rho e^{i\omega}) = a(p) + ib(p) - \frac{e^{i\omega}}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\rho\cos(nt))e^{int}\,dt.$$

Para calcular el grado, debemos ver lo que ocurre con el último término cuando $\rho \gg 0$; para eso, alcanza con observar que, al igual que en el ejemplo anterior,

$$\lim_{\rho\to+\infty}\int_0^{2\pi} g(\rho\cos(nt))e^{int}\,dt = g(+\infty)\int_{A_n^+} e^{int}\,dt + g(-\infty)\int_{A_n^-} e^{int}\,dt$$

donde ahora se define

$$A_n^+ := \{t \in (0, 2\pi) : \cos(nt) > 0\}, \qquad A_n^- := \{t \in (0, 2\pi) : \cos(nt) < 0\}.$$

Pero ahora el resultado es el mismo para n par o impar:

$$\int_{A_n^+} e^{int}\,dt = \int_{A_n^-} e^{int}\,dt = 2,$$

de modo que resulta

$$\lim_{\rho\to+\infty}\phi(\rho e^{i\omega}) = a(p) + ib(p) - \frac{2}{\pi}[g(+\infty) - g(-\infty)]e^{i\omega}$$

uniformemente en ω. Esto revela cuán chica tiene que ser la proyección de p: para que el grado sea distinto de 0 necesitamos que el segundo término (una circunferencia en sentido antihorario) se dé una vueltita alrededor de $z_p := a(p) + ib(p)$. En otras palabras, hay que pedir

$$|z_p| < \frac{2}{\pi}|g(+\infty) - g(-\infty)|.$$

Esta es la famosa condición de Lazer-Leach [2], que también suele escribirse así:

$$\left(\int_0^{2\pi} p(t)\cos(nt)\,dt\right)^2 + \left(\int_0^{2\pi} p(t)\,\mathrm{sen}\,(nt)\,dt\right)^2 < 4[g(+\infty) - g(-\infty)]^2.$$

Veamos ahora que esta condición también es necesaria para las cotas a priori. Para eso, observemos en primer lugar que, como en los ejemplos anteriores, existe una constante c tal que si $u \in C^2_{2\pi}$ es solución de (1) entonces

$$\|u - Pu\| \le c\|u'' + n^2u\|_\infty \le r.$$

Además vale

$$\int_0^{2\pi} g(u(t))e^{int}\,dt = \int_0^{2\pi} p(t)e^{int}\,dt,$$

así que escribimos

$$u(t) = A(t) + P(u)(t) = A(t) + \rho\cos(nt - \omega)$$

donde $|A(t)| \leq r$. Como antes, se obtiene

$$e^{i\omega}\int_0^{2\pi} g(A(t+\omega/n) + \rho\cos(nt))e^{int}\,dt = \int_0^{2\pi} p(t)e^{int}\,dt.$$

La cuenta es igual que antes: cuando $\rho \to +\infty$, el término de la izquierda tiende uniformemente a la función $2[g(+\infty) - g(-\infty)]e^{i\omega}$, así que la igualdad no puede darse si $\rho \gg 0$.

References

[1] R. Gaines and J. Mawhin, Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations, vol. 568 of Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1977.

[2] Lazer-Leach (1969)